Von harmonischen homogenen Polynomen zu Kugelflächenfunktionen

Da die Kugeloberfläche S^2 kompakt ist, lässt sich jede anständige Funktion $f(\vec{r}\,|\vec{r}^2{=}1) = g(\vartheta,\varphi)$ mit $(x,y,z) = r\,(\sin\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta)$ dort in eine abzählbare Basis entwickeln. Eine extrem nützliche Basis kann man durch drei Eigenschaften definieren:

1. Homogenität: $f = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell$ mit $f_\ell(\alpha\vec{r}) = \alpha^\ell f_\ell(\vec{r})$ für $\ell = 0,1,2,\dots$ und $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$. Entsprechend ist außerhalb S^2 fortgesetzt $g(r,\vartheta,\varphi) = \sum_\ell r^\ell g_\ell(\vartheta,\varphi)$.
2. Harmonizität: $\triangle f_\ell \equiv (\partial_x^2{+}\partial_y^2{+}\partial_z^2) f_\ell = 0$, was in sphärischen Koordinaten bedeutet $\triangle(r^\ell g_\ell) \equiv (\frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2}\Lambda) r^\ell g_\ell = r^{\ell-2}(\ell(\ell{+}1) + \Lambda)\, g_\ell = 0$ $(*)$ oder auch „Funktionen g_ℓ sind Eigenfunktionen von $-\Lambda$ mit Eigenwert $\ell(\ell{+}1)$."
3. z-Orientierung: Funktionen f_ℓ bzw. g_ℓ lassen sich noch sortieren nach Eigenfunktionen von $M = \frac{1}{\mathrm{i}}(x\partial_y - y\partial_x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_\varphi$, also $M\, f_{\ell m} = m\, f_{\ell m}$ und genauso für $g_{\ell m}$.

Nach Normierung werden die Eigenfunktionen $g_{\ell m}$ mit $Y_{\ell m}$ bezeichnet. Demnach lässt sich jede Funktion auf der Sphäre entwickeln als $g(\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell,m} a_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ mit $a_{\ell m}\in\mathbb{C}$.

(a) Rechnen Sie Gleichung $(*)$ nach.

(b) Konstruieren Sie in kartesischen Koordinaten die Polynome $Y_{\ell m}(x,y,z)$ für $\ell = 1$ und 2. Sortieren Sie dazu um: $f_1 = a_x x + a_y y + a_z z = a_{11}(x{+}\mathrm{i}y) + a_{10}\, z + a_{1-1}(x{-}\mathrm{i}y)$ und berechnen Sie die M-Eigenwerte für diese Terme. Wiederholen Sie die Strategie für $f_2 = \ldots + a_{20}[(x{+}\mathrm{i}y)(x{-}\mathrm{i}y) + \lambda z^2] + \ldots$ und fixieren Sie λ mit der Forderung $\triangle f_2 = 0$.

(c) Rechnen Sie nun in sphärische Koordinaten um und lesen Sie die (unnormierten) $Y_{\ell m}$ ab. Fixieren Sie λ alternativ über $0 \overset{!}{=} (6+\Lambda) g_{20} = (6 + \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta \sin\vartheta\, \partial_\vartheta)[\sin^2\vartheta + \lambda\cos^2\vartheta]$.

(d) Besseres Verfahren: $f_{\ell\ell} = (x{+}\mathrm{i}y)^\ell \;\leftrightarrow\; g_{\ell\ell} = \sin^\ell\vartheta\, \mathrm{e}^{\ell\mathrm{i}\varphi}$. Mit $L_- f_{\ell m} = f_{\ell\, m-1}$ (oder $g_{\ell m}$) für $L_- = (x{-}\mathrm{i}y)\partial_z - z(\partial_x{-}\mathrm{i}\partial_y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(-\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi)$ im m-Wert „absteigen" $f_{\ell\ell} \xrightarrow{L_-} f_{\ell\,\ell-1} \xrightarrow{L_-} \ldots \xrightarrow{L_-} f_{\ell 0} \xrightarrow{L_-} \ldots \xrightarrow{L_-} f_{\ell\,-\ell} \xrightarrow{L_-} 0$. Wegen $f^*_{\ell m}{=}f_{\ell\,-m}$ ist also $m\in\{-\ell,\dots,+\ell\}$. Für Wagemutige: Berechnen Sie auf diese Weise die Y_{3m} (unnormiert).

Entwicklung einer ebenen Welle in Kugelwellen

Der räumliche Teil $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ einer ebenen Welle genügt der Helmholtz-Gleichung. Also sollte er sich auch nach dem in $\mathbb{R}^3$ vollständigen „Kugelwellen"-Funktionensatz $\{j_\ell(kr)\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\}$ mit $m = -\ell,\dots,\ell$ und $\ell = 0,1,2,\dots$ entwickeln lassen. Wegen $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\,r\,\cos\gamma$ ist nur ein Winkel im Spiel, so dass bei Wahl der z-Achse in $\vec{k}$-Richtung $\vartheta = \gamma$ wird und nichts von φ abhängt, weswegen nur $Y_{\ell 0}(\vartheta,\varphi) \sim P_\ell(\cos\vartheta)$ benötigt wird in der Entwicklung

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{i}^\ell\,(2\ell{+}1)\, j_\ell(kr)\, P_\ell(\cos\gamma) \qquad \text{für} \quad \gamma = \sphericalangle(\vec{k},\vec{r})\ .$$

Beweisen Sie diese Formel, indem Sie unbestimmte Koeffizienten a_ℓ anstatt i^ℓ schreiben,

(a) die linke Seite in eine Potenzreihe entwickeln, $kr{=}\rho$ und $\cos\gamma{=}z$ abkürzen und dann $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\, P_n(z)$ auf beide Seiten anwenden (wobei n beliebig ist),

(b) auf der rechten Seite die Orthogonalität $(2\ell{+}1)\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\, P_\ell(z)\, P_n(z) = 2\,\delta_{\ell n}$ verwenden sowie die Form der sphärischen Besselfunktion $j_\ell(\rho) = \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!}\,\rho^\ell$ + höhere ρ-Potenzen,

(c) auf der linken Seite $z^\ell = c_\ell P_\ell + c'_\ell P_{\ell-1} + \ldots$ mit $c_\ell = 2^\ell(\ell!)^2/(2\ell)!$ schreiben und wiederum die Orthogonalität der Legendre-Polynome nutzen,

(c) die ρ^n-Terme (niedrigste Potenz) auf beiden Seiten vergleichen und a_n ablesen.